

1.4 Bases de \mathbb{R}^n

1.4.1 Dépendance et indépendance linéaire

Définition 1.1.4.56

Ensemble de vecteurs linéairement indépendants

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$, m vecteurs de \mathbb{R}^n . On dit que l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ est linéairement indépendant (ou libre) si l'unique solution de l'équation vectorielle

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

est la solution triviale $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$.

Dans le cas contraire, l'équation $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_m \vec{v}_m = \vec{0}$ admet une infinité de solutions,

et l'ensemble de vecteurs est dit linéairement dépendant (ou lié).

Il existe alors des coefficients non tous nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

et cela s'appelle une relation de dépendance linéaire.

En pratique, déterminer si un ensemble de vecteurs est linéairement libre ou lié reviendra à résoudre un système d'équations linéaires.

Exemples. 1. Les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants, car si $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ alors } x_1 = x_2 = 0.$$

2. Les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sont-ils linéairement indépendants?

Pour répondre, résolvons l'équation vectorielle suivante :

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour ce faire, réduisons et échelonnons la matrice suivante $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Après calculs, nous obtenons la matrice échelonnée réduite suivante : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ce qui

implique que dans l'équation vectorielle, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc le système de vecteurs

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ est linéairement indépendant.

3. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ sont-ils linéairement indépendants ?

Nous avons deux manières de répondre.

- (a) La première est de remarquer que $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, donc $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$, donc

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ n'est pas un ensemble de vecteurs indépendants.

- (b) Si nous n'avons pas immédiatement remarqué cette égalité de vecteurs, nous pouvons réduire et échelonner la matrice $\begin{bmatrix} 8 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$. Ce qui donne $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Or

cette matrice est la matrice des coefficients d'un système homogène à une infinité de solutions, donc on peut en déduire que l'ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est dépendant. Nous pouvons même aller plus loin et mettre en évidence la dépendance. La matrice échelonnée réduite indique que x_3 est une variable libre, et que $x_1 = -x_3$ et $x_2 = -x_3$, donc l'équation vectorielle $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ se résout en

$x_1 = -t, x_2 = -t, x_3 = t$ et choisir $t = -1$ équivaut à la relation d'équivalence illustrée dans la réponse (a).

Méthode 1.1.4.57

La remarque précédente constitue une méthode générale pour déterminer si un ensemble de vecteurs est libre ou lié.

Observation Parfois, une relation de dépendance apparaît comme évidente, lorsque le nombre de vecteurs est petit et que les coefficients sont simples (entiers compris entre -2 et 2 , par exemple). Parfois, l'indépendance des vecteurs est évidente, par exemple si les vecteurs ont des coordonnées en escalier, mais dans ce cas-là, il faut quand même fournir

une justification en utilisant la deuxième méthode. Par exemple : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Algorithme de Gauss-Jordan Construire une matrice A dont les colonnes sont les vecteurs considérés, puis résoudre $A\vec{x} = \vec{0}$. L'ensemble de vecteurs est libre si et seulement si la seule solution est $\vec{x} = \vec{0}$. Cette méthode est évidemment celle qui fonctionnera toujours.

Le théorème 1.1.4.60 sera particulièrement puissant dans certains cas.

Remarques 1.1.4.58. 1. Nous pourrions parler de colonnes d'une matrice qui sont linéairement dépendantes ou indépendantes. Soit $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$, alors on a les équivalences suivantes (faire le raisonnement pour s'en convaincre !)

- (a) $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ est libre \Leftrightarrow le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale.
- (b) $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ est lié \Leftrightarrow le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une infinité de solutions.
2. $\{\vec{v}\}$ est lié si et seulement si $\vec{v} = \vec{0}$.
3. Tout ensemble de vecteurs contenant le vecteur nul est linéairement dépendant.
4. $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est lié si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Théorème 1.1.4.59

Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ est lié si et seulement si au moins un de ces vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Supposons que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ est lié. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ non tous nuls, tels que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$. Si nécessaire, réordonnons les vecteurs de sorte que $\lambda_m \neq 0$. Dans ce cas, on peut réécrire $\lambda_m \vec{v}_m = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \vec{v}_{m-1}$, donc $\vec{v}_m = \frac{1}{\lambda_m} (\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \vec{v}_{m-1})$

Supposons maintenant que l'un des vecteurs au moins soit combinaison linéaire des autres. Supposons, quitte à réordonner, que c'est v_m : $\vec{v}_m = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \vec{v}_{m-1}$. Cet ensemble de vecteurs est donc lié, puisque $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \vec{v}_{m-1} - \vec{v}_m = \vec{0}$. Le dernier coefficient étant -1 , les λ_i sont non tous nuls. \square

Exemple. Considérons les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. On a alors la relation d'équivalence : $2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} +$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et la combinaison linéaire } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Théorème 1.1.4.60

Tout ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ de \mathbb{R}^n est linéairement dépendant si $m > n$.

Démonstration. Considérons la matrice $A = [\vec{v}_1 \ \dots \ \vec{v}_m]$. Cette matrice a plus de colonnes que de lignes, les colonnes ne peuvent donc pas toutes être des colonnes pivots. Il y a donc des variables libres, donc des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres. \square

Exemple. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$ est un ensemble lié de vecteurs, puisqu'il y a quatre vecteurs de dimension trois.

Remarque 1.1.4.61. Attention ! Si $m \leq n$, on ne sait pas a priori si les vecteurs sont linéairement dépendant ou non. Par exemple, si $n = 3$ et $m = 2$, on a, d'une part, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ qui sont

indépendants, et d'autre part, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ qui sont dépendants.

1.4.2 Bases de \mathbb{R}^n

Rappel. Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ engendre \mathbb{R}^n si tout élément de \mathbb{R}^n peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$. Dans ce cas, $m \geq n$.

Définition 1.1.4.62

Base de \mathbb{R}^n

Une base de \mathbb{R}^n est un ensemble linéairement indépendant de vecteurs générateur de \mathbb{R}^n .

Remarque 1.1.4.63. Autrement dit, si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ est une base de \mathbb{R}^n , alors pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ réels, tels que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m$, et $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ est libre.

Remarque importante 1.1.4.64

Nous avons vu au théorème 1.1.4.60 que $m \leq n$. Nous avons aussi vu au corollaire 1.1.3.50 que $m \geq n$ (attention ! les rôles de n et m étaient inversés dans la formulation de ce corollaire). Donc finalement, $n = m$. Autrement dit, une base de \mathbb{R}^n est toujours constituée de n vecteurs.

Définition 1.1.4.65

Base canonique

La base la plus simple de \mathbb{R}^n est constituée de n vecteurs dont toutes les composantes sauf une vaut 0, l'autre vaut 1

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Elle est appelée base canonique.

Exemples. 1. Dans \mathbb{R}^2 , il est facile d'expliciter des bases. Il suffit d'avoir deux vecteurs non colinéaires. Par exemple : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ est une base de \mathbb{R}^2 . En effet, c'est un ensemble libre

de vecteurs, car la matrice échelonnée réduite de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Et c'est un ensemble

générateur de \mathbb{R}^2 , car la matrice échelonnée réduite de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \end{bmatrix}$.

Donc tout vecteur $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ vérifie l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (2b_1 - b_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (b_2 - b_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

La base canonique a un rôle essentiel en algèbre linéaire. Tout vecteur de \mathbb{R}^n peut être écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de la base canonique. Typiquement,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On notera généralement (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de \mathbb{R}^n . L'ordre des vecteurs est important. La base $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est différente de la base $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. Si l'on veut spécifier les vecteurs d'une base sans tenir compte de l'ordre, on la notera entre accolades. Par exemple, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.